$$\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = 3 + 2t & (2) \\ z = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$(1+2t)^2 + (3+2t)^2 + 0^2 - 4(3+2t) + 2\times 0 + 2 = 0$

$\Rightarrow 1 + 4t + 4t^2 + 9 + 12t + 4t^2 - 12 - 8t + 2 = 0$

$\Rightarrow 8t^2 + 8t = 0 \Rightarrow 8t(t+1) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = -1$

Ainsi le système a deux solutions :

Pour $t = 0$: $x = 1$ et $y = 3$ et $z = 0$

Et pour $t = -1$: $x = -1$ et $y = 1$ et $z = 0$

D'où : $\boxed{(S) \cap (D) = \{E(1;3;0) ; F(-1;1;0)\}}$

Exercice 7 :

1) Calcul de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$; Equation cartésienne du plan (OAB)

On a $A(1;2;1)$ et $B(1;3;1)$ donc : $\overrightarrow{OA}(1;2;1)$ et $\overrightarrow{OB}(1;3;1)$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= -\vec{i} + \vec{k}$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\ (-1;0;1)}$

Puisque : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ alors O et A et B ne sont pas alignés donc ils forment un plan (OAB) qui admet $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ comme vecteur normal

Ainsi : $(OAB): -x + z + c = 0$

Or $O(0;0;0) \in (OAB) \Rightarrow -0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

D'où : $\boxed{(OAB): -x + z = 0}$

2) Equation cartésienne de la sphère (S) :

Cherchons le rayon de la sphère (S). On a le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) donc son rayon est :

$$R = d\left(\Omega ; (OAB)\right) = \frac{|-x_\Omega + z_\Omega|}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} = \frac{|-(-3)+1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Soit : $M(x;y;z) \in (S) \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (2\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 8$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2z + 2 = 0$

Donc : $\boxed{(S): x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2z + 2 = 0}$

3) Le point de tangence de (S) et du plan (OAB)

Le point de tangence de (S) et du plan (OAB) est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (OAB) ; pour le trouver on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x = -3 - t & (1) \\ y = 0 & (2) \\ z = 1 + t & (3) \\ -x + z = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$3 + t + 1 + t = 0 \Rightarrow 2t + 4 = 0 \Rightarrow t = -2$

Ainsi : $x = -3 + 2 = -1$ et $y = 0$ et $z = 1 - 2 = -1$

D'où : $\boxed{H(-1;0;-1)}$ est le point de contact entre d (S) et (OAB).

4) Mq la droite (D) est tangente à la sphère (S) :

On a la droite (D) passe par $H(-1;0;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;5;2)$; donc : $d(\Omega;(D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Calculons $\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u}$:

$$\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 5\\-2 & 2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}2 & 2\\-2 & 2\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}2 & 2\\0 & 5\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= 10\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k}$$

Donc : $d(\Omega;(D)) = \frac{\sqrt{10^2+(-8)^2+10^2}}{\sqrt{2^2+5^2+2^2}} = \frac{\sqrt{264}}{\sqrt{33}} = 2\sqrt{2} = R$

Ainsi la droite (D) est tangente à la sphère (S) en H (car $H \in (S)$ et $H \in (D)$)

Exercice 8 :

1) a) Calculons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC

On a $A(1;2;3)$ et $B(2;1;3)$ et $C(2;-2;0)$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & -4\\0 & -3\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & -3\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & -4\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ (3;3;-3)}$

L'aire du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

b) Equation cartésienne du plan (ABC) :

Puisque : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$; alors le plan (ABC) admet $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal ; Ainsi : $(ABC): 3x + 3y - 3z + c = 0$

Or $A(1;2;3) \in (ABC) \Rightarrow 3 + 6 - 9 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

D'où : $\boxed{(ABC): 3x + 3y - 3z = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0}$

2) Représentation paramétrique de la droite (DE) :

Le vecteur $\overrightarrow{DE}(-6;6;0)$ (car $D(2;0;2)$ et $E(-4;6;2)$) est un vecteur directeur de la droite (DE) ; En remarquant que cette droite passe par le point D donc sa représentation paramétrique est la suivante : $\boxed{(DE): \begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 6t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$

3) Mq (S) est une sphère de centre $\Omega(1;1;4)$ et de rayon $R = 2$:

On a : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - -2x - 2y - 8z + 14 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 8z + 14 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 - 8z + 16 - 16 + 14 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 4 = 2^2$

Donc (S) est une sphère de centre $\Omega(1;1;4)$ et de rayon $R = 2$

4) Mq (DE) est tangente à (S) en un point H à déterminer :

Pour cela on résout directement le système suivant :

$$\begin{cases} x = 2 - 6t & (1) \\ y = 6t & (2) \\ z = 2 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 8z + 14 = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$(2-6t)^2 + (6t)^2 + 2^2 - 2(2-6t) - 2(6t) - 8\times 2 + 14 = 0$

$\Rightarrow 4 - 24t + 36t^2 + 36t^2 + 4 - 4 + 12t - 12t - 16 + 14 = 0$

$\Rightarrow 72t^2 - 24t + 2 = 0 \Rightarrow 2(36t^2 - 12t + 1) = 0$

$\Rightarrow 2(6t-1)^2 = 0 \Rightarrow 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$

Ainsi le système a une seule solution : $x = 1$ et $y = 1$ et $z = 2$

D'où (DE) est tangente à (S) en $H(1;1;2)$

5) Mq le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle en déterminant son centre et son rayon :

On a : $(ABC): x + y - z = 0$ et $\Omega(1;1;4)$ et de rayon $R = 2$

Donc : $d = d\left(\Omega;(ABC)\right) = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|-2|}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} < R = 2$

Alors le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre H' et de rayon $\boxed{r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}}$

Qartay.tn -Aqra Bech Qartay.tn
FB: révision bac science 2020 TN
Scanned by DocumentScanner | Lufick